ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRI-67-
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

P'

Concours d'Admission 1976

Trois pages dactylographiées

MATHEMATIQUES I

On désigne par $\mathcal{F}_1$ *l'espace vectoriel complexe des applications (ou fonctions) du corps des réels* $\mathbb{R}$ *dans le corps des complexes* $\mathbb{C}$, *par* $\mathcal{F}_2$ *l'espace vectoriel complexe des applications (ou fonctions) de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{C}$.

Etant donné un élément (f, a) *de* $\mathcal{F}_2 \times \mathbb{R}$, *on note* $f(a,.)$ [*respectivement* $f(.,a)$] *l'élément de* $\mathcal{F}_1$ *défini par*

$\forall x \in R$, $x \longmapsto f(a,x)$ [*respectivement* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,a)$].

Etant donné un élément f *de* $\mathcal{F}_2$, *on désigne par* $\mathcal{D}(f)$ [*respectivement* $\mathcal{G}(f)$] *le sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}_1$ *dont une famille génératrice est* $\left(f(a,.)\right)_{a \in \mathbb{R}}$ [*respectivement* $\left(f(.,a)\right)_{a \in \mathbb{R}}$].

Les parties II et III sont indépendantes.

I

1°) *Soit* f *un élément de* $\mathcal{F}_2$.

a) *On suppose* $\mathcal{D}(f)$ *de dimension finie* ρ *strictement supérieure à* 0. *Montrer qu'il existe* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell) \in \mathcal{F}_1^\ell$ *et* $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ *tels que l'on ait :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=\ell} \alpha_i(x) f(a_i, y)$.

b) *Démontrer que* $\mathcal{D}(f)$ *et* $\mathcal{G}(f)$ *sont simultanément soit de dimension finie (et que dans ce cas ils ont même dimension), soit de dimension infinie. Cette dimension commune, finie ou infinie, est notée* $r(f)$; *on l'appelle rang de* f.

On montrera que $r(f) = 0$ *caractérise la fonction nulle.*

2°) a) *Soit* $f \in \mathcal{F}_2$ *et* $(p, q) \in \mathbb{C}^2$. *On pose, pour tout élément* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$, $g(x\,y) = e^{px+qy} f(x,y)$. *Montrer que l'on a* $r(g) = r(f)$.

b) *Quel est le rang de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = P(x+y)$, *où* P *est un polynôme non nul de* $\mathbb{C}[X]$, *de degré* n ?

c) *Quel est le rang de* f *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = e^{xy}$?

3°) *On désigne par* Φ *le sous-ensemble des fonctions de* $\mathcal{F}_2$ *de rang fini et par* Φ^* *cet ensemble* Φ *privé de la fonction nulle.*

.../...

a) *Montrer l'équivalence des propositions suivantes :*

Ⓐ $f \in \Phi$

Ⓑ *Il existe au moins un entier* n *strictement positif et* $2n$ *fonctions* $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots v_n$, *éléments de* $\mathcal{F}_1$ *tels que l'on ait :*

$$①\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} u_i(x)\, v_i(y).$$

Φ *est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}_2$. *Une relation telle que* ① *constituera une décomposition de* f, *et* n *sera la longueur de cette décomposition.*

b) *Montrer que la plus petite longueur d'une décomposition d'un élément* f *de* Φ^* *est égale à* $r(f)$. *Toute décomposition de* f *de longueur* $r(f)$ *sera dite minimale.*

c) *Etablir que si la relation* ① *est une décomposition minimale pour* $f \in \Phi^*$, *alors* $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *et* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *sont respectivement des bases de* $\mathcal{G}(f)$ *et* $\mathcal{D}(f)$.

d) *Montrer que si* $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *et* $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ *sont des systèmes libres dans* $\mathcal{F}_1$, *la relation* ① *représente une décomposition minimale de* f.

e) *Démontrer que, la relation* ① *étant minimale, pour que la relation*

$$②\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} s_i(x)\, t_i(y)$$

soit aussi minimale, il faut et il suffit qu'il existe, dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *des matrices carrées complexes à* n *lignes et* n *colonnes, une matrice* A *régulière telle que l'on ait :*

$$③\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} s_1(x) \\ s_2(x) \\ \vdots \\ s_n(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} \quad * \quad \begin{pmatrix} t_1(y) \\ t_2(y) \\ \vdots \\ t_n(y) \end{pmatrix} = \left({}^tA\right)^{-1} \begin{pmatrix} v_1(y) \\ v_2(y) \\ \vdots \\ v_n(y) \end{pmatrix}$$

(${}^tA$ *désigne la transposée de la matrice* A)

4°) *Démontrer que si* f *est de classe* m , *dans toute décomposition minimale telle que* ① , *les fonctions* $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n$ *sont de classe* m.

5°) *On suppose que* f *est une fonction polynôme en* x *et* y , $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *que l'on peut écrire*

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{i=k} P_i(x)\, y^i = \sum_{j=0}^{j=h} Q_j(y)\, x^j = (1\ y\ \ldots\ y^k)\, M \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^h \end{pmatrix},$$

.../...

où les P_i et Q_j sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ et M une matrice complexe. Démontrer que le rang de f est égal au rang du système $(P_0, P_1, \ldots P_k)$, au rang du système $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_h)$, et au rang de la matrice M.

II

On suppose que l'élément f de Φ est une fonction symétrique, c'est-à-dire que l'on a : $\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = f(y,x)$. $\mathcal{G}(f)$ et $\mathcal{D}(f)$ se confondent alors en un même sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_1$ noté $\mathcal{E}(f)$.

1°) a) Montrer qu'il existe une matrice A symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et une seule, telle que l'on ait :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \ldots & u_n(x) \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} u_1(y) \\ u_2(y) \\ \vdots \\ u_n(y) \end{pmatrix}$$

b) En déduire qu'il existe une décomposition minimale de f de la forme

$$④ \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} w_i(x)\ w_i(y) .$$

2°) Déterminer, pour la fonction polynôme f définie par

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (x+y)^m$, m entier strictement positif, une décomposition minimale telle que ④.

III (Option P')

On désigne par $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_1$ formé des fonctions g indéfiniment dérivables et telles que la fonction de $\mathcal{F}_2$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $(x,y) \longmapsto g(x+y)$ soit de rang fini, ce rang étant par définition celui de g.

1°) Déterminer les fonctions g de $\mathcal{A}$ de rang 1. On montrera qu'une telle fonction ne prend jamais la valeur zéro.

2°) Soit $f \in \Phi$, f de rang 2, et admettant des dérivées partielles d'ordre quelconque. Montrer qu'il existe trois fonctions a, b, c, éléments de $\mathcal{F}_1$, non toutes nulles, et telles que l'on ait :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad a(x)\, f''_{x^2}(x,y) + b(x)\, f'_x(x,y) + c(x)\, f(x,y) = 0$$

3°). Etant donnée $g \in \mathcal{A}$, de rang 2, montrer qu'il existe des nombres complexes β et γ tels que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g''(x) + \beta\, g'(x) + \gamma\, g(x) = 0 .$$

Expliciter toutes les fonctions de $\mathcal{A}$ de rang 2.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail